Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Daniel Palacín

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Sommersemester 2020

Topologie

Blatt 6

Abgabe: 01.07.2020, 11Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

a) Zeige, dass X genau dann lokal zusammenhängend ist, wenn alle Zusammenhangskomponenten einer offenen Teilmenge von X mit der Spurtopologie offen sind.

b) Zeige, dass jede offene Teilmenge abzählbar viele Zusammenhangskomponenten hat, wenn X lokal zusammenhängend ist und die Abzählbarkeitseigenschaft zweiter Klasse besitzt.

c) Wie viele Zusammenhangskomponenten besitzt $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit der Spurtopologie bezüglich der euklidischen Topologie? Besitzt $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ die Abzählbarkeitseigenschaft zweiter Klasse ?

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.**

Ist die Menge $[0, 1]$ mit der Spurtopologie bezüglich der Sorgenfrey Geraden kompakt?

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.**

Sei $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset \mathbb{R} \,|\, 0 \in U\}$.

a) Zeige, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $\mathbb{R}$ so definiert, dass $\{0\}$ eine dichte Teilmenge ist. Ist diese Topologie T_1?

b) Ist $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ zusammenhängend?

c) Besitzt $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ die Abzählbarkeitseigenschaft erster Klasse?

d) Besitzt $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ die Abzählbarkeitseigenschaft zweiter Klasse?

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**

Sei $f : X \to Y$ eine abgeschlossene Abbildung topologischer Räume derart, dass jede Faser $f^{-1}(\{y\})$, mit y aus Y, eine kompakte Teilmenge von X ist. Zeige, dass für jede kompakte Teilmenge K aus Y das Urbild $f^{-1}(K)$ kompakt in X ist.

Hinweis: Endliche Durchschnittseigenschaft.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden (Bitte alle Namen eintragen!) Abgabe der Übungsblätter im ILIAS als eine einzige PDF-Datei.